Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(x^2 + x\right) e^x$. Χρησιμοποιήστε την f ώστε να υπολογίσετε τη σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\nu!}$.

Λύση Η συνάρτηση f είναι απείρως φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Είναι:

$$f'(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right) e^x \tag{1}$$

$$f''(x) = \left(x^2 + 5x + 4\right) e^x \tag{2}$$

$$f^{(3)}(x) = \left(x^2 + 7x + 9\right) e^x \tag{3}$$

$$f^{(4)}(x) = \left(x^2 + 9x + 16\right) e^x \tag{4}$$

Εικάζουμε (και αποδεικνύουμε επαγωγικά) ότι:

$$f^{(\nu)}(x) = \left(x^2 + (2\nu + 1)x + \nu^2\right) e^x$$

Οπότε: $f(x) = \cancelto{0}{f(0)} + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0) x^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2 x^\nu}{\nu!}$. Οπότε για $x = 1$ η τελευταία σχέση δίνει :

$$f(1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\nu!} \iff \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\nu!} = 2e$$

Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ν φορές διαφορίσιμη τέτοια ώστε $f^{(\nu)}(1) = \dfrac{\nu!}{2^\nu}$.

i. Να γράψετε το τύπο Taylor της f στο $x_0 = 1$.

ii. Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η παραπάνω (δυναμό) σειρά ;

iii. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

[Tolaso J. Kos]

Λύση

i. Η σειρά Taylor της f γύρω από το $x_0 = 1$ είναι :

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(1)\,(x-1)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cancel{\nu!}\,(x-1)^\nu}{2^\nu \cdot \cancel{\nu!}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-1)^\nu}{2^\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^\nu$$

ii. Πρέπει:

$$\begin{aligned} \lim \sqrt[\nu]{\left|\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|^\nu} < 1 &\iff \left|\frac{x-1}{2}\right| < 1 \\ &\iff |x-1| < 2 \\ &\iff -1 < x < 3 \end{aligned}$$

iii. Είναι:

$$f(0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{0-1}{2}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$